VII - FORMULAÇÃO MATRICIAL DO SIMPLEX

• FORMULAÇÃO MATRICIAL DE UM PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR:

Na apresentação feita em "Programação Linear : Conceitos Fundamentais" já havíamos indicado que um problema de Programação Linear expresso na forma standard se pode representar matricialmente:

Maximizar $F = C \cdot X$

sujeito a:

$$A \cdot X = b$$

$$X \geq 0$$

Na representação anterior, o vector das incógnitas $\mathbf{X} = [\ X_1 \ \ X_2 \ \dots \ X_n\ ]^T$ é um vector coluna (n x 1), o vector dos coeficientes da função objectivo $\mathbf{C} = [\ c_1 \ \ c_2 \ \dots \ c_n\ ]$ é um vector linha (1 x n), a matriz dos coeficientes das restrições $\mathbf{A} = [\ a_{kl}\ ]$ (k = 1, 2, ..., m ; l = 1, 2, ..., n) é uma matriz (m x n) e o vector dos termos independentes $\mathbf{b} = [\ b_1 \ \ b_2 \ \dots \ b_m\ ]^T$ é um vector coluna (m x 1). De notar que **0** é o vector nulo do tipo (n x 1).

Exemplifiquemos a representação matricial de um problema de Programação Linear com o problema seguinte:

Maximizar $F = 4 \cdot X + 3 \cdot Y$

sujeito a:

$$-1 \cdot X + 1 \cdot Y \leq 3$$
$$4 \cdot X + 1 \cdot Y \leq 8$$

$$X,\ Y \geq 0$$

Na sua forma standard, tem-se:

$$\text{Maximizar } F = 4 \, . \, X + 3 \, . \, Y + 0 \, . \, F_1 + 0 \, . \, F_2$$

sujeito a:

$$-1 \, . \, X + 1 \, . \, Y + 1 \, . \, F_1 + 0 \, . \, F_2 = 3$$
$$4 \, . \, X + 1 \, . \, Y + 0 \, . \, F_1 + 1 \, . \, F_2 = 8$$

$$X \, , \, Y \, , \, F_1 \, , \, F_2 \geq 0$$

a que corresponde a seguinte representação matricial:

$$\text{Max } F = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} X \\ Y \\ F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{sujeito a } \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X & Y & F_1 & F_2 \end{bmatrix}^T \geq \mathbf{0}$$

Ou seja,

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

- **FORMULAÇÃO MATRICIAL DO SIMPLEX:**

A representação tabular de um problema de Programação Linear (na forma standard) pode ser esquematizada do modo seguinte:

$$\left[\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline -C & 0 \end{array} \right] \qquad \begin{array}{l} A \, . \, X = b \\ F - C \, . \, X = 0 \end{array}$$

Recorde-se que esta representação tabular não corresponde necessariamente a um Quadro do Simplex !

Relativamente ao exemplo anterior, a correspondente representação tabular seria:

$$\begin{array}{cccc|c} X & Y & F_1 & F_2 & \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 8 \\ \hline -4 & -3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Consideremos agora a **decomposição das matrizes X, C e A relativamente às variáveis básicas e não básicas**:

$X = \left[\begin{array}{c\|c} X_B & X_D \end{array}\right]$	X_B	$(m \times 1)$	vector das variáveis básicas
	X_D	$((n-m) \times 1)$	vector das variáveis não básicas
$C = \left[\begin{array}{c\|c} C_B & C_D \end{array}\right]$	C_B	$(1 \times m)$	vector dos coeficientes f.o.(var. básicas)
	C_D	$(1 \times (n-m))$	vector dos coeficientes f.o.(var. não básicas)
$A = \left[\begin{array}{c\|c} B & D \end{array}\right]$	B	$(m \times m)$	matriz dos coeficientes restr.(var. básicas)
	D	$(m \times (n-m))$	matriz dos coeficientes restr.(var. não básicas)

NOTA MUITO IMPORTANTE: A ordem das variáveis nos vectores X_B e X_D condiciona a ordem dos coeficientes de C_B , C_D , B e D !

Poderemos, agora, re-escrever a representação tabular do problema de Programação Linear:

$$\left[\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline -C & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} B & D & b \\ \hline -C_B & -C_D & 0 \end{array}\right]$$

Retomemos o exemplo apresentado anteriormente e consideremos que X e Y são variáveis básicas (e, consequentemente, que F_1 e F_2 são variáveis não básicas). Ter-se-ia, então, a seguinte representação tabular:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & X & Y & F_1 & F_2 & \\
 & & & & & \\
\end{array}
\left[\begin{array}{cccc|c}
-1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\
4 & 1 & 0 & 1 & 8 \\
\hline
-4 & -3 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

a que correspondem as seguintes matrizes:

$$
B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} X & Y \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} -1 & 1 \\ 4 & 1 \end{array}\right] \end{array}
\qquad
D = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} F_1 & F_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}
\qquad
b = \left[\begin{array}{c} 3 \\ 8 \end{array}\right]
$$

$$
C_B = \left[\begin{array}{cc} +4 & +3 \end{array}\right]
\qquad
C_D = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \end{array}\right]
$$

Recordemo-nos de uma característica muito importante dos Quadros do Simplex: a coluna correspondente a cada variável básica tem apenas um coeficiente unitário (na linha correspondente à restrição relativamente à qual a variável é básica), sendo nulos os restantes coeficientes. Assim, **num Quadro do Simplex, as colunas correspondentes às variáveis básicas formam uma matriz identidade** e, por outro lado, **são nulos os coeficientes das variáveis básicas na linha da função objectivo.**

$$
\left[\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline -C & 0 \end{array}\right]
\Rightarrow
\left[\begin{array}{cc|c} B & D & b \\ \hline -C_B & -C_D & 0 \end{array}\right]
$$

$$
\Downarrow
$$

$$
\left[\begin{array}{cc|c} I & ? & ? \\ \hline 0 & ? & ? \end{array}\right]
$$

Como se poderá passar da representação tabular (decomposta relativamente às variáveis básicas e não básicas) ao correspondente Quadro do Simplex ?

Comecemos por pré-multiplicar B^{-1} por $[\ B \mid D \mid b\ ]$.

$$
B^{-1} . [\ B \mid D \mid b\ ] = [\ B^{-1}.B \mid B^{-1}.D \mid B^{-1}.b\ ] = [\ I \mid B^{-1}.D \mid B^{-1}.b\ ]
$$

Obtivemos, assim, a desejada matriz identidade correspondendo às variáveis básicas. Só precisamos de garantir que os coeficientes dessas variáveis na linha da função objectivo sejam nulos. Na representação tabular, esses coeficientes são representados por $-C_B$. Assim, bastará pré-multiplicar $+C_B$ por $[\ I \mid B^{-1}.D \mid B^{-1}.b\ ]$ e, em seguida somar à "anterior linha da função objectivo" $[\ -C_B \mid -C_D \mid 0\ ]$:

$$
\begin{array}{rcl}
+C_B . [\ I \mid B^{-1}.D \mid B^{-1}.b\ ] & = & [\ +C_B \mid +C_B . B^{-1}.D \mid +C_B . B^{-1}.b\ ] \\
 & & \underline{+[\ -C_B \mid -C_D \mid 0\ ]} \\
 & & [\ 0 \mid -C_D + C_B . B^{-1}.D \mid +C_B . B^{-1}.b\ ]
\end{array}
$$

Poderemos, agora, completar o esquema que anteriormente apresentámos:

$$\left[\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline -C & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} B & D & b \\ \hline -C_B & -C_D & 0 \end{array}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} I & B^{-1}.D & B^{-1}.b \\ \hline 0 & \underbrace{-C_D + C_B \,.\, B^{-1}.D}_{r\, =\, \nearrow} & \underbrace{C_B \,.\, B^{-1}.b}_{F\, =\, \nearrow} \end{array}\right]$$

Conseguimos, assim, determinar um Quadro do Simplex directamente, a partir da representação tabular inicial (sem levar a cabo qualquer processo iterativo) !

Os coeficientes das variáveis não básicas nas restrições são dados por $B^{-1}.D$. O vector das variáveis básicas é dado por $X_B = B^{-1}.b$. A função objectivo valerá $F = C_B \,.\, B^{-1}.b$. Para simplificar a notação designaremos por **r** os coeficientes das variáveis não básicas na linha da função objectivo no Quadro do Simplex, isto é, $r = - C_D + C_B \,.\, B^{-1}.D$.

Aproveitemos o exemplo que temos vindo a apresentar e determinemos o Quadro do Simplex correspondente à base (X , Y) utilizando a formulação matricial do Simplex.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} X & Y & F_1 & F_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cc|c} -1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 8 \\ \hline -4 & -3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} X & Y \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad D = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} F_1 & F_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$C_B = \begin{bmatrix} +4 & +3 \end{bmatrix} \qquad C_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/5 & 1/5 \\ 4/5 & 1/5 \end{bmatrix} \qquad B^{-1}.D = \begin{bmatrix} -1/5 & 1/5 \\ 4/5 & 1/5 \end{bmatrix} \qquad X_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$r = \begin{bmatrix} +8/5 & +7/5 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 16 \end{bmatrix}$$

Nota: $r = - C_D + C_B \,.\, B^{-1}.D \qquad X_B = B^{-1}.b \qquad F = C_B \,.\, B^{-1}.b$

Poderemos, agora, escrever o correspondente Quadro do Simplex:

	X	Y	F_1	F_2	T.I.
X Y	I		$B^{-1}.D$		$B^{-1}.b$
F	0		$-C_D + C_B . B^{-1}.D$		$C_B . B^{-1}.b$

⇩

	X	Y	F_1	F_2	T.I.
X	1	0	- 1/5	1/5	1
Y	0	1	4/5	1/5	4
F	0	0	8/5	7/5	16

Como se viu, obtivemos directamente este Quadro do Simplex (por acaso, correspondente à solução óptima do problema...) sem levar a cabo qualquer processo iterativo ! Poderemos comparar este Quadro com o obtido aquando da resolução do mesmo problema pelo Algoritmo Simplex Primal:

	X	Y	F_1	F_2	T.I.
Y	0	1	4/5	1/5	4
X	1	0	-1/5	1/5	1
F	0	0	8/5	7/5	16

2ª Iteração

$X^* = 1$; $Y^* = 4$
$F^* = 16$
Sol. Óptima

Como se pode observar, trata-se exactamente da mesma solução e dos mesmos valores dos diferentes coeficientes. *Apenas* a **ordem** das variáveis não é igual ! Para obtermos exactamente este Quadro, através da utilização da formulação matricial do Simplex, bastaria constituir a matriz **B** considerando primeiro a variável Y e, só depois, a variável X. Relembra-se, assim, o que já anteriormente se frisara:

NOTA MUITO IMPORTANTE: A ordem das variáveis nos vectores X_B e X_D condiciona a ordem dos coeficientes de C_B , C_D , B e D ! Esta ordem condiciona, também, a ordem de apresentação dos resultados do cálculo matricial: $- C_D + C_B . B^{-1}.D$; $B^{-1}.b$!

Testemos estes novos conhecimentos com o seguinte exercício:

Considere o seguinte problema de Programação Linear:

Minimizar $F = 1. X + 3. Y$

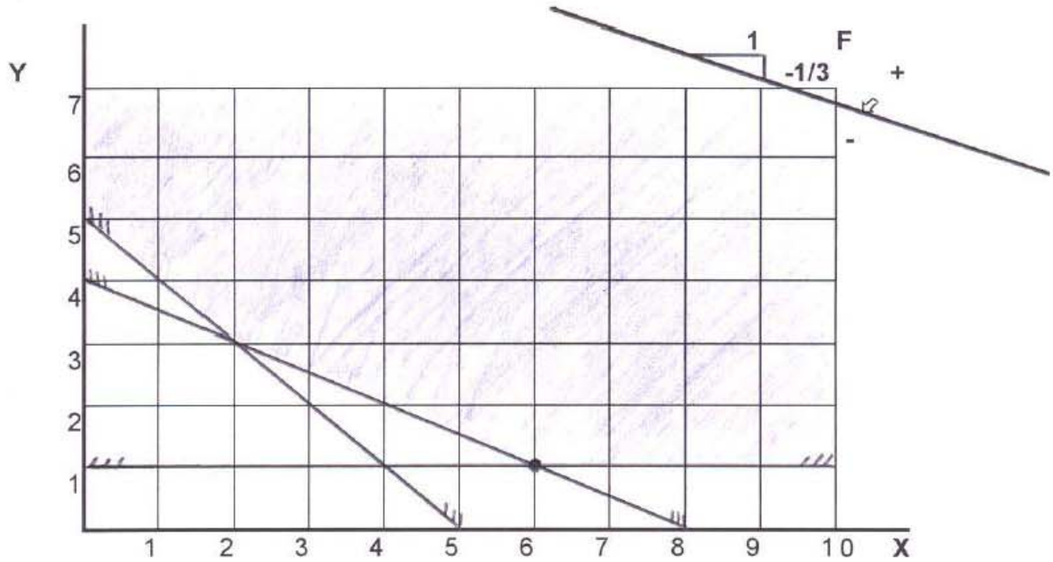
sujeito a:

$$1 . Y \geq 1$$
$$1 . X + 2 . Y \geq 8$$
$$1 . X + 1 . Y \geq 5$$
$$X , Y \geq 0$$

a) Resolva-o graficamente.

b) Utilizando a formulação matricial do Simplex, obtenha o Quadro do Simplex correspondente à solução óptima determinada na alínea anterior.

a)



A solução óptima do problema corresponde a (X* , Y*) = (6 , 1), com F* = 9.

b) Antes de se avançar deve-se ter um cuidado inicial: escrever o problema na forma standard:

Maximizar $G = -1 . X - 3 . Y \qquad (G = -F)$

sujeito a:

$$1 . Y - 1 . F_1 + 0 . F_2 + 0 . F_3 = 1$$
$$1 . X + 2 . Y + 0 . F_1 - 1 . F_2 + 0 . F_3 = 8$$
$$1 . X + 1 . Y + 0 . F_1 + 0 . F_2 - 1 . F_3 = 5$$

$$X , Y , F_1 , F_2 , F_3 \geq 0$$

E agora só precisamos de identificar a base correspondente à solução óptima ! Estamos perante um problema com <u>três</u> restrições pelo que uma base deste problema é constituída por <u>três</u> variáveis básicas. X e Y são positivas pelo que obviamente pertencem à base óptima.

Se observarmos com atenção a resolução gráfica do problema, constataremos que a solução óptima corresponde ao vértice definido pela intersecção da primeira com a segunda restrições. Assim, esse vértice corresponde a $F_1 = 0$ e $F_2 = 0$ (já que são estas as duas variáveis de folga que correspondem a essas restrições). Resta-nos, assim, a variável F_3 para integrar a base.

Poderemos verificar o raciocínio exposto, substituindo os valores de X e Y (X* = 6 ; Y* = 1) nas três restrições e determinando os correspondentes valores das variáveis de folga: $F_1^* = 0$; $F_2^* = 0$ e $F_3^* = 2$. Ora cá está o que já havíamos concluído: a base correspondente à solução óptima é constituída pelas variáveis X, Y e F_3 .

Avancemos agora para a utilização da formulação matricial do Simplex.

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} X & Y & F_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad D = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} F_1 & F_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$C_B = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \qquad C_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B^{-1}.D = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad X_B = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$r = \begin{bmatrix} +1 & +1 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} -9 \end{bmatrix}$$

Nota: $r = -C_D + C_B . B^{-1}.D$ $X_B = B^{-1}.b$ $G = C_B . B^{-1}.b$

Conclusão: Trata-se da solução óptima, já que os coeficientes na linha da função objectivo são todos não negativos. A matriz B foi escrita considerando a seguinte ordem das variáveis: X, Y e F_3. Assim, os valores do vector X_B corresponderão, por esta ordem, a essas variáveis: $X^* = 6$, $Y^* = 1$ e $F_3{}^* = 2$, o que confirma os cálculos anteriormente apresentados. Finalmente, $G^* = -9$, ou seja, $F^* = +9$. De notar que todas estas conclusões foram obtidas sem que se tivesse escrito um único Quadro do Simplex !

Poderemos agora escrever o Quadro do Simplex correspondente à solução óptima (já que o enunciado do exercício o pedia) a partir dos elementos obtidos a partir da formulação matricial do Simplex:

	X	Y	F_3	F_1	F_2	T.I.
X						
Y		I		$B^{-1}.D$		$B^{-1}.b$
F_3						
G		0		$-C_D + C_B . B^{-1}.D$		$C_B . B^{-1}.b$

⇩

	X	Y	F_3	F_1	F_2	T.I.
X	1	0	0	2	- 1	6
Y	0	1	0	- 1	0	1
F_3	0	0	1	1	- 1	2
G	0	0	0	+ 1	+ 1	- 9

Recordemo-nos do esquema que resume a formulação matricial do Simplex:

$$\left[\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline -C & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} B & D & b \\ \hline -C_B & -C_D & 0 \end{array}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} I & B^{-1}.D & B^{-1}.b \\ \hline 0 & -C_D + C_B . B^{-1}.D & C_B . B^{-1}.b \end{array}\right]$$

$$r = \nearrow \qquad F = \nearrow$$

Se, relativamente às matrizes **D** e **C_D** for possível considerar a decomposição seguinte

$$D = \left[\begin{array}{c|c} D_1 & \mathbf{I} \end{array}\right] \qquad \mathbf{I} \ \text{matriz identidade (m x m)}$$

$$C = \left[\begin{array}{c|c} C_{D1} & \mathbf{0} \end{array}\right] \qquad \mathbf{0} \ \text{vector nulo (1 x m)}$$

ter-se-á um caso particular da formulação matricial do Simplex:

$$\left[\begin{array}{cc|c|c} B & D_1 & \mathbf{I} & b \\ \hline -C_B & -C_{D1} & \mathbf{0} & 0 \end{array}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\begin{array}{cc|c|c} \mathbf{I} & B^{-1}.D_1 & B^{-1} & B^{-1}.b \\ \hline 0 & -C_{D1} + C_B \,.\, B^{-1}.D_1 & C_B \,.\, B^{-1} & C_B \,.\, B^{-1}.b \end{array}\right]$$

$$F = \nearrow$$

Nesta situação pode identificar-se a inversa da matriz B, $\mathbf{B^{-1}}$, no Quadro do Simplex, bem como o vector linha $\mathbf{C_B \,.\, B^{-1}}$ (que corresponde às variáveis duais - ver "Dualidade em Programação Linear").

Consideremos agora o exercício seguinte:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	TI
X_8	2	0	3	4	1	3	0	1	0	2
X_7	4	5	-1	0	2	5	1	0	0	4
X_9	0	1	1	0	6	1	0	0	1	6
F	-1	4	-3	-2	-2	4	0	0	0	0

Complete o Quadro do Simplex abaixo relativo ao mesmo problema e comente a solução em análise.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	TI
X_5	0	0			1		-1/30	1/15	1/6	
X_2	0	1			0		1/5	-2/15	0	
X_1	1	0			0		1/60	7/15	-1/12	
F	0	0			0					

Para resolvermos o problema teremos de começar por re-ordenar as variáveis (adoptando a mesma ordem nos dois Quadros), de modo a podermos identificar as desejadas matrizes identidade.

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} B & D_1 & I & b \\ \hline -C_B & -C_{D1} & 0 & 0 \end{array}\right]$$

	B			D_1			I				
	X_5	X_2	X_1	X_3	X_4	X_6	X_8	X_7	X_9	TI	
X_8	1	0	2	3	4	3	1	0	0	2	b
X_7	2	5	4	- 1	0	5	0	1	0	4	
X_9	6	1	0	1	0	1	0	0	1	6	
F	- 2	4	-1	- 3	- 2	4	0	0	0	0	
		$-C_B$			$-C_{D1}$			0			

⇩

	I			$B^{-1}.D_1$			B^{-1}				
	X_5	X_2	X_1	X_3	X_4	X_6	X_8	X_7	X_9	TI	
X_5	1	0	0				1/15	- 1/30	1/6		$B^{-1}.b$
X_2	0	1	0				- 2/15	1/5	0		
X_1	0	0	1				7/15	1/60	- 1/12		
F	0	0	0								
		0			$-C_{D1}+C_B.B^{-1}.D_1$			$C_B.B^{-1}$			$C_B.B^{-1}.b$

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} I & B^{-1}.D_1 & B^{-1} & B^{-1}.b \\ \hline 0 & -C_{D1}+C_B\,.\,B^{-1}.D_1 & C_B\,.\,B^{-1} & C_B\,.\,B^{-1}.b \end{array}\right]$$

$F = \nearrow$

Cálculos auxiliares:

$$B^{-1}.D_1 = \begin{bmatrix} 1/15 & -1/30 & 1/6 \\ -2/15 & 1/5 & 0 \\ 7/15 & 1/60 & -1/12 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/5 & 4/15 & 1/5 \\ -3/5 & -8/15 & +3/5 \\ 13/10 & 28/15 & 7/5 \end{bmatrix}$$

$$-C_{D1} + C_B\,.\,B^{-1}.D_1 = \begin{bmatrix} -3 & -2 & +4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2/5 & 4/15 & 1/5 \\ -3/5 & -8/15 & +3/5 \\ 13/10 & 28/15 & 7/5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & -2 & +4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9/2 & 68/15 & -3/5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} +3/2 & +38/15 & +17/5 \end{bmatrix}$$

sol. não óptima

$$C_B\,.\,B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2/5 & 4/15 & 1/5 \\ -3/5 & -8/15 & +3/5 \\ 13/10 & 28/15 & 7/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +9/2 & +68/15 & -3/5 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}.b = \begin{bmatrix} 2/5 & 4/15 & 1/5 \\ -3/5 & -8/15 & +3/5 \\ 13/10 & 28/15 & 7/5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46/15 \\ 4/15 \\ 277/15 \end{bmatrix} \leftarrow \text{s.b.a. não degenerada}$$

$$c_B.B^{-1}.b = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 46/15 \\ 4/15 \\ 277/15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 353/15 \end{bmatrix}$$

Poderemos, agora, preencher o Quadro do Simplex:

	X_5	X_2	X_1	X_3	X_4	X_6	X_8	X_7	X_9	TI
X_5	1	0	0	2/5	4/15	1/5	1/15	- 1/30	1/6	46/15
X_2	0	1	0	-3/5	-8/15	+3/5	- 2/15	1/5	0	4/15
X_1	0	0	1	13/10	28/15	7/5	7/15	1/60	- 1/12	277/15
F	0	0	0	3/2	38/15	17/5	9/2	68/15	-3/5	353/15

Re-ordenando as variáveis, poderemos escrever:

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	TI
X5	0	0	2/5	4/15	1	1/5	-1/30	1/15	1/6	46/15
X2	0	1	-3/5	-8/15	0	3/5	1/5	-2/15	0	4/15
X1	1	0	13/10	28/15	0	7/5	1/60	7/15	-1/12	277/15
F	0	0	3/2	38/15	0	17/5	68/15	9/2	-3/5	353/15

A solução correspondente é básica admissível, não degenerada e não óptima.